Следствие. *Группа автоморфизмов решетки подалгебр с 1 полукольца многочленов* $\mathbb{R}^+[x]$ *изоморфна мультипликативной группе* $\mathbb{P}$ *положительных действительных чисел.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров В. В. *О строении решеточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2009. – Т. 39. – С. 339-341.

М. А. Скворцова

Новосибирский государственный университет,

sm-18-nsu@yandex.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим квазилинейную систему дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t) + Dy(t-\tau)\Big) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \quad (1)$$

где A, B, D — постоянные вещественные матрицы размера $n \times n$, $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $F(t, y_1, y_2) \in C(\mathbb{R}^{2n+1})$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по y_1 и оценке

$$\|F(t, y_1, y_2)\| \leqslant q_1\|y_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|y_2\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 > 0, \; \omega_1, \omega_2 > 0.$$

Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), получение областей притяжения нулевого решения и установление оценок решений, характеризующих скорость убывания на бесконечности.

Для систем дифференциальных уравнений вида (1) в литературе хорошо известны теоремы об асимптотической устойчивости [1 – 3]. Однако оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности, начали появляться только в последние 10 лет [4 – 11].

Для квазилинейных систем вида (1) при $D = 0$ оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности, а также области притяжения нулевого решения впервые были получены в работе [7]. В этой работе авторами был построен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds,$$

где $H = H^* > 0$, $K(s) = K^*(s) > 0$, $s \in [0,\tau]$. В настоящей работе используется обобщение данного функционала:

$$v(t,y) = \Big\langle H\Big(y(t) + Dy(t-\tau)\Big), \Big(y(t) + Dy(t-\tau)\Big)\Big\rangle + \\ + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Сформулируем основные результаты. Рассмотрим начальную задачу для системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(y(t) + Dy(t-\tau)\Big) = Ay(t) + By(t-\tau) + \\ \qquad\qquad + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi(t) \in C^1[0,\tau]$ — заданная вектор-функция. Будем полагать, что $y(\tau + 0) = \varphi(\tau)$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(I) существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) \in \in C^1[0,\tau]$, такие, что $K(s) > 0$, $\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leqslant 0$, $k > 0$, $s \in [0,\tau]$, и составная матрица

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена;

(II) $\widetilde{c_1} = c_1 - \|H\|\Big(q_1(1 + \|D\|)^{\omega_1}\|D\| + q_2\Big)\Big(\|D\| + + \sqrt{1 + \|D\|^2}\Big) > 0$, где $c_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы C.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (I) *и* (II) *и* $\|D\| < < p^{-1}$, *где* $p = \exp\left(\dfrac{\varepsilon\tau}{2\|H\|}\right)$, $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\widetilde{c_1}}{1 + \|D\|^2}, \ k\|H\|\right\}$. *Тогда множество вещественнозначных функций*

$$\Omega_1 = \bigg\{\varphi(t) : 2q_1\|H\|\mu(H)(1 + \|D\|)^{\omega_1}\Big(\|H^{-1}\|v(\tau,\varphi)\Big)^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$
$$\Big(M\Upsilon(1 - p\|D\|)^{-1} + \|D\|\Big)\|\varphi\|_\infty \leqslant 1\bigg\}$$

является множеством притяжения нулевого решения, где

$$\mu(H) = \|H\|\|H^{-1}\|, \ M = \sqrt{\|H^{-1}\|\Big(\|H\|(1 + \|D\|)^2 + \tau\|K\|_\infty\Big)},$$

$$\|K\|_\infty = \max_{s\in[0,\tau]}\|K(s)\|, \quad \|\varphi\|_\infty = \max_{s\in[0,\tau]}\|\varphi(s)\|,$$

$$\Upsilon = \left(1 - \frac{2q_1\|H\|}{\varepsilon}\mu(H)(1 + \|D\|)^{\omega_1}\Big(\|H^{-1}\|v(\tau,\varphi)\Big)^{\frac{\omega_1}{2}}\right)^{-\frac{1}{\omega_1}} > 0.$$

При этом для решения $y(t)$ *задачи (2) справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\|H\|}\right)\Big(M\Upsilon(1 - p\|D\|)^{-1} + 1\Big)\|\varphi\|_\infty.$$

Для случаев $\|D\| = p^{-1}$ и $p^{-1} < \|D\| < 1$ имеют место аналогичные теоремы.

Следствие. *Пусть выполнены условия* (I) *и* (II) *и* $\|D\|<1$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи и помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт 16.740.11.0127).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* – М.: Физматгиз, 1959.

2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971.

3. Кореневский Д. Г. *Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.* – Киев: Наукова думка, 1989.

4. Kharitonov V. L., Hinrichsen D. *Exponential estimates for time-delay systems* // Systems Control Lett. – 2004. – V. 53. – No 5. – P. 395-405.

5. Kharitonov V. L., Mondié S., Collado J. *Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2005. – V. 50. – No 5. – P. 666-670.

6. Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т. *Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 8. – С. 1137-1140.

7. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2005. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 20-28.

8. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 1025-1040.

9. Melchor-Aguilar D., Niculescu S. I. *Estimates of the attraction region for a class of nonlinear time-delay systems* // IMA J. Math. Control Inform. – 2007. – V. 24. – No 4. – P. 523-550.

10. Demidenko G. V. *Stability of solutions to linear differential equations of neutral type* // J. Anal. Appl. – 2009. – V. 7. – No 3. – P. 119-130.

11. Демиденко Г. В., Котова Т. В., Скворцова М. А. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10. – Вып. 3. – С. 17-29.